

Varianta 64

SUBIECTUL I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$.
- b) M este mijlocul segmentului $(AC) \Rightarrow M(3, 2)$.
- c) $MB = 3$.
- d) $S_{ABC} = 6$.
- e) $\cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$.
- f) $\bar{z} = -3 - 4i$

SUBIECTUL II

1.

- a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 = 15$.
- b) $(f \circ f)(2) = 16$.
- c) $p = \frac{3}{4}$.
- d) $C_{10}^2 = 45$.
- e) $x = 7$.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2 + 3$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 6$
- c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.
- d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{4}$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = 0$.
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci suma elementelor matricei este 8.
- c) $A^3 = O_3$.

d) $B_1 = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B_1) = 1.$

e) Fie $P(n): B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$

$P(1)$ este adevărată din **d**).

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

Dar $B_{k+1} = (A + I_3)^{k+1} = (A + I_3)^k \cdot (A + I_3) = B_k \cdot B_1 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2k & 4k^2 - k \\ 0 & 1 & 4k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) & 4(k+1)^2 - k - 1 \\ 0 & 1 & 4(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*.$

f) Folosind **e)** avem $\det(B_1 + B_2 + \dots + B_{10}) = \begin{vmatrix} 10 & 110 & 1485 \\ 0 & 10 & 220 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000.$

g) Din **f)** suma elementelor este 1845.

SUBIECTUL IV

a) $f(1) = 1.$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$

d) $\int_1^a f(x) dx = \ln a - \ln 1 = \ln a.$

e) $x_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

g) Din **d)** $\int_1^a f(x) dx = \ln a, \int_1^b f(x) dx = \ln b, \int_1^c f(x) dx = \ln c.$

Dacă a, b, c sunt în progresie geometrică atunci $b^2 = ac$

$\Rightarrow 2 \ln b = \ln a + \ln c \Rightarrow \ln b = \frac{\ln a + \ln c}{2}$, deci numerele $\ln a, \ln b, \ln c$ sunt în progresie aritmetică.